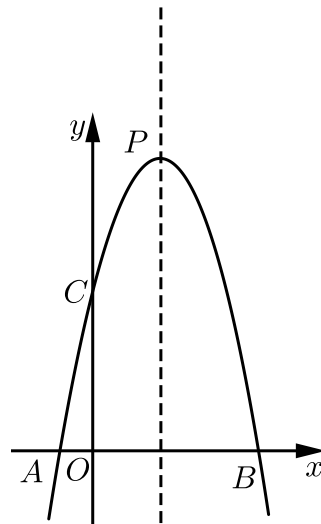


第2讲二次函数与四边形存在性加油站

一、 平行四边形

1. 如图，在平面直角坐标系中，抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的顶点坐标为 $P(2, 9)$ ，与 x 轴交于点 A, B ，与 y 轴交于点 $C(0, 5)$ 。



- (1) 求二次函数的解析式及点 A, B 的坐标。
(2) 设点 Q 在第一象限的抛物线上，若其关于原点的对称点 Q' 也在抛物线上，求点 Q 的坐标。
(3) 若点 M 在抛物线上，点 N 在抛物线的对称轴上，使得以 A, C, M, N 为顶点的四边形是平行四边形，且 AC 为其一边，求点 M, N 的坐标。

【答案】 (1) 二次函数的解析式为 $y = -(x - 2)^2 + 9 = -x^2 + 4x + 5$ ， $A(-1, 0)$ ， $B(5, 0)$ 。

(2) 点 Q 的坐标 $(\sqrt{5}, 4\sqrt{5})$ 。

(3) 当点 $M(1, 8)$ 时， $N(2, 13)$ ，当 M 的坐标 $(3, 8)$ 时， $N(2, 3)$ 。

【解析】 (1) 设抛物线解析式为 $y = a(x - 2)^2 + 9$ ，

$\because$ 抛物线与 y 轴交于 $C(0, 5)$ ，

$$\therefore 4a + 9 = 5,$$

$$\therefore a = -1,$$

$$\therefore y = -(x - 2)^2 + 9 = -x^2 + 4x + 5,$$

$$\therefore A(-1, 0), B(5, 0).$$

(2) 设 Q 的坐标 $(m, -m^2 + 4m + 5)$ ， $0 < m < 5$ ，

$\because$ 点 Q' 与点 Q 关于原点对称，

$$\therefore Q'(-m, m^2 - 4m - 5),$$

$\therefore Q'$ 点也在抛物线上,

$$\therefore m^2 - 4m - 5 = -(-m)^2 + 4(-m) + 5,$$

$$\therefore m = -\sqrt{5} \text{ (舍) 或 } m = \sqrt{5},$$

$\therefore$ 点 Q 的坐标 $(\sqrt{5}, 4\sqrt{5})$.

(3) 如图, 过点 M 作 $MH \perp$ 对称轴, 垂足为点 H ,

$\therefore$ 四边形 $ACMN$ (或 $ACNM$) 是平行四边形,

$\therefore MN \parallel AC, MN = AC,$

$\therefore \triangle HMN \cong \triangle AOC,$

$\therefore MH = OA = 1,$

$\therefore M$ 点横坐标为 $x = 3$ 或 $x = 1,$

$\therefore M(1, 8),$ 或 $(3, 8),$

$$\therefore AC^2 = OA^2 + OC^2 = 26,$$

$$\therefore MN^2 = 26,$$

设点 N 的坐标为 $(2, t),$

①当点 $M(1, 8)$ 时,

$$(2 - 1)^2 + (t - 8)^2 = 26,$$

$$t = 3 \text{ (舍) 或 } t = 13,$$

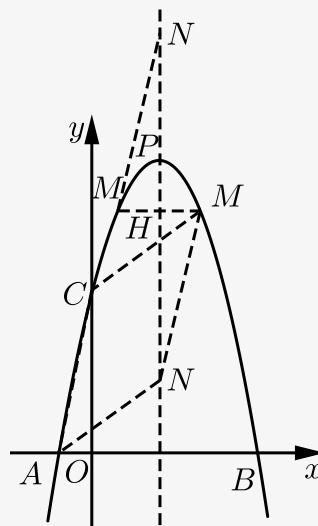
$\therefore N(2, 13),$

②当 M 的坐标 $(3, 8)$ 时,

$$(2 - 3)^2 + (t - 8)^2 = 26,$$

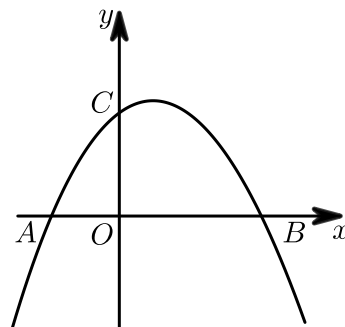
$$t = 3 \text{ 或 } t = 13 \text{ (舍)},$$

$\therefore N(2, 3).$



【标注】【知识点】二次函数与平行四边形

2. 如图, 抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}x + 2$ 与 x 轴相交于 A, B 两点, (点 A 在 B 点左侧) 与 y 轴交于点 C .



(1) 求 A, B 两点坐标.

- (2) 连接 AC ，若点 P 在第一象限的抛物线上， P 的横坐标为 t ，四边形 $ABPC$ 的面积为 S 。试用含 t 的式子表示 S ，并求 t 为何值时， S 最大。
- (3) 在 (2) 的基础上，若点 G, H 分别为抛物线及其对称轴上的点，点 G 的横坐标为 m ，点 H 的纵坐标为 n ，且使得以 A, G, H, P 四点构成的四边形为平行四边形，求满足条件的 m, n 的值。

【答案】 (1) $A(-\sqrt{2}, 0), B(2\sqrt{2}, 0)$ 。

(2) $t = \sqrt{2}$ 。

(3) $m = -\frac{\sqrt{2}}{2}, n = \frac{3}{4}$ 或 $m = \frac{5\sqrt{2}}{2}, n = -\frac{15}{4}$ 或 $m = -\frac{3\sqrt{2}}{2}, n = \frac{1}{4}$ 。

【解析】 (1) 当 $y = 0$ 时，

$$-\frac{1}{2}x^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}x + 2 = 0,$$

$$x = -\sqrt{2} \text{ 或 } x = 2\sqrt{2},$$

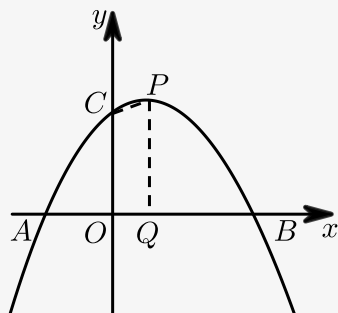
$$\therefore A(-\sqrt{2}, 0), B(2\sqrt{2}, 0)。$$

(2) 令 $x = 0$ ，

$$\therefore y = 2,$$

$$C(0, 2),$$

如图，作 $PQ \perp x$ 轴于 Q ，



$\therefore P$ 的横坐标为 t ，设 $P(t, p)$ ，

$$\therefore p = -\frac{1}{2}t^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}t + 2,$$

$$PQ = p, BQ = 3\sqrt{2} - t, OQ = t,$$

$$\therefore S = S_{\triangle ADC} + S_{\text{梯}OCPQ} + S_{\triangle PQB}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot (2 + p)t + \frac{1}{2} \cdot (2\sqrt{2} - t) \cdot p$$

$$= t + \sqrt{2} + \sqrt{2}p$$

$$= \sqrt{2} \left(-\frac{1}{2}t^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}t + 2 \right) + t + \sqrt{2}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}(t - \sqrt{2})^2 + 4\sqrt{2} (0 < t < 2\sqrt{2}),$$

$\therefore t = \sqrt{2}$ 时， S 最大为 $4\sqrt{2}$ 。

(3) 由(2)知, $t = \sqrt{2}$,

$$\therefore P(\sqrt{2}, 2),$$

$$\therefore \text{抛物线 } y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}x + 2 \text{ 对称轴 } x = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{设 } G\left(m, -\frac{1}{2}m^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}m + 2\right), H\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, n\right),$$

以 A, G, H, P 构成平行四边形 $A(-\sqrt{2}, 0)$.

① 当 AP 和 HG 为对角线,

$$\frac{1}{2}(\sqrt{2} - \sqrt{2}) = \frac{1}{2}\left(m + \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$\frac{1}{2}(2 + 0) = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}m^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}m + 2 + n\right),$$

$$m = -\frac{\sqrt{2}}{2}, n = \frac{3}{4},$$

② 当 AG 和 PH 是对角线时,

$$\frac{1}{2}(m - \sqrt{2}) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}m^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}m + 2 + 0\right) = \frac{1}{2}(n + 2),$$

$$m = \frac{5\sqrt{2}}{2}, n = -\frac{15}{4}.$$

$$\text{③ } AH \text{ 和 } PG \text{ 为对角线时, } \frac{1}{2}\left(-\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}(m + \sqrt{2}),$$

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}m^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}m + 2 + 2\right) = \frac{1}{2}(m + 0),$$

$$m = -\frac{3\sqrt{2}}{2}, n = \frac{1}{4},$$

$$\therefore \text{综上所述, } m = -\frac{\sqrt{2}}{2}, n = \frac{3}{4} \text{ 或 } m = \frac{5\sqrt{2}}{2}, n = -\frac{15}{4} \text{ 或 } m = -\frac{3\sqrt{2}}{2}, n = \frac{1}{4}.$$

【标注】【知识点】二次函数与平行四边形

3. 抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$ (b, c 为常数) 与 y 轴相交于点 C , 经过点 C 作直线 $CD \parallel x$ 轴, 交抛物线于点 D , 将直线 CD 向上平移 t 个单位长度, 交抛物线于点 A 和 B (A 在 B 的左侧), 直线 AB 与抛物线的对称轴 l 交于点 E .

(1) 当 $b = -2, c = 1$ 时, 求抛物线顶点 P 的坐标.

(2) 若 $\angle ACB = 90^\circ$, 求 t 的值.

(3) 在 (2) 的条件下, 当以点 A, D, C, E 为顶点的四边形为平行四边形时, 求 b 的值.

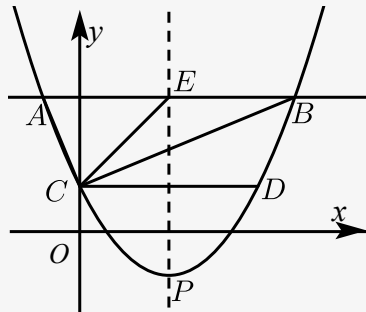
【答案】 (1) $(2, -1)$.

(2) 2.

$$(3) b = \pm \frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

【解析】(1) 把 $b = -2$, $c = 1$ 代入 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$,
得到 $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 = \frac{1}{2}(x - 2)^2 - 1$,
 $\therefore$ 抛物线的顶点 P 的坐标为 $(2, -1)$.

(2) 如图,



$$\because \angle ACB = 90^\circ, AE = EB,$$

$$\therefore CE = \frac{1}{2}AB,$$

$$\text{由 } \frac{1}{2}x^2 + bx + c = c + t, \text{ 解得 } x = -b \pm \sqrt{b^2 + 2t},$$

$$\therefore A(-b - \sqrt{b^2 + 2t}, c + t), B(-b + \sqrt{b^2 + 2t}, c + t),$$

$$\therefore AB = 2\sqrt{b^2 + 2t},$$

$$\therefore E(-b, c + t), C(0, c),$$

$$\therefore CE = \sqrt{b^2 + t^2},$$

$$\therefore \sqrt{b^2 + t^2} = \sqrt{b^2 + 2t},$$

$$\text{解得 } t = 2 \text{ 或 } 0 \text{ (舍弃)},$$

$$\therefore t = 2.$$

(3) 由题意 $CD = AE$,

$$\therefore A(-b - \sqrt{b^2 + 2t}, c + t), E(-b, c + t), \text{ 且点 } A \text{ 在点 } E \text{ 的左侧},$$

$$\therefore AE = \sqrt{b^2 + 2t},$$

$$\therefore C(0, c), D(-2b, c),$$

$$\therefore CD = |-2b|,$$

$$\therefore \sqrt{b^2 + 2t} = |-2b|,$$

$$\therefore 3b^2 = 2t,$$

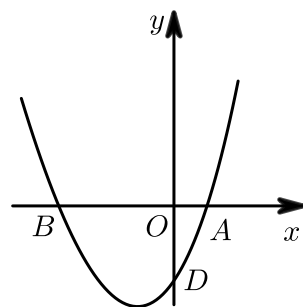
$$\therefore t = 2,$$

$$\therefore b = \pm \frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

【标注】【知识点】二次函数与平行四边形

二、矩形

4. 如图，在平面直角坐标系中，抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 的图象与 x 轴交于点 $A(2, 0)$ 、 $B(-4, 0)$ ，与 y 轴于点 D 。



- (1) 求抛物线的解析式。
 (2) 连接 BD ，点 P 在抛物线的对称轴上，以 Q 为平面内一点，以点 P 、 B 、 D 、 Q 为顶点的四边形能否成为矩形？若能，请求出点 P 的坐标；若不能，请说明理由。

【答案】 (1) $y = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$ 。

(2) 能，满足条件的 P 的坐标为 $(-1, 3)$ 或 $(-1, -5)$ 或 $(-1, -2 + \sqrt{7})$ 或 $(-1, -2 - \sqrt{7})$ 。

【解析】 (1) 由题意 $\begin{cases} 2 + 2b + c = 0 \\ 8 - 4b + c = 0 \end{cases}$ ，

$$\text{解得} \begin{cases} b = 1 \\ c = -4 \end{cases}.$$

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$ 。

(2) 如图1中，当 BD 为矩形的边时，

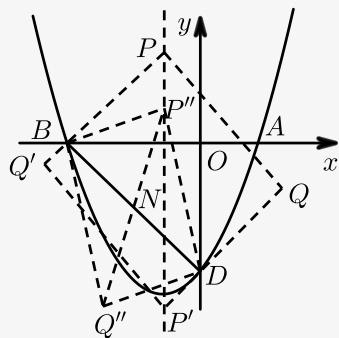


图 1

$\therefore$ 直线 BD 的解析式为 $y = -x - 4$ ，

$\therefore$ 直线 BP 的解析式为 $y = x + 4$ ，直线 DP' 的解析式为 $y = x - 4$ ，

可得 $P(-1, 3)$ ， $P'(-1, -5)$ 。

当 BD 为矩形的对角线时, 设 $P(-1, m)$, BD 的中点 $N(-2, -2)$,

由 $BN = P'N$,

可得 $1^2 + (m+2)^2 = (2\sqrt{2})^2$,

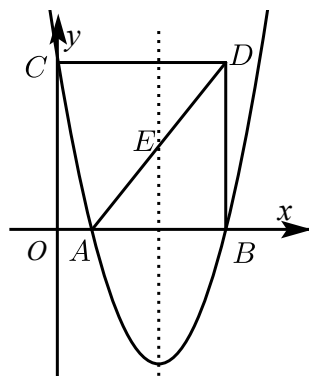
解得 $m = -2 + \sqrt{7}$ 或 $-2 - \sqrt{7}$,

$\therefore P'(-1, -2 + \sqrt{7})$ 或 $(-1, -2 - \sqrt{7})$.

综上所述, 满足条件的 P 的坐标为 $(-1, 3)$ 或 $(-1, -5)$ 或 $(-1, -2 + \sqrt{7})$ 或 $(-1, -2 - \sqrt{7})$.

【标注】【知识点】二次函数与角度问题

5. 如图, 在平面直角坐标系中, 点 O 是原点, 正方形 $OBDC$ 的顶点 B 在 x 轴的正半轴上, 顶点 C 在 y 轴的正半轴上, 点 D 的坐标是 $(5, 5)$, 抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 经过 B 、 C 两点与 x 轴的另一个交点是点 A , 连接 AD .



- (1) 请直接写出抛物线的表达式.
- (2) 设抛物线的对称轴与直线 AD 相交于点 E , 求出点 E 的坐标.
- (3) 若点 M 是抛物线对称轴上一点, 点 N 是平面内一点, 是否存在以 A 、 D 、 M 、 N 为顶点的矩形, 若存在, 请直接写出 M 点的坐标; 若不存在, 请说明理由.

【答案】 (1) $y = x^2 - 6x + 5$.

(2) $\left(3, \frac{5}{2}\right)$.

(3) 存在, 点 M 的坐标为 $\left(3, \frac{33}{5}\right)$, $\left(3, -\frac{8}{5}\right)$, $\left(3, \frac{5 - \sqrt{41}}{2}\right)$ 或 $\left(3, \frac{5 + \sqrt{41}}{2}\right)$.

【解析】 (1) $\because$ 四边形 $OBDC$ 为正方形, 点 D 的坐标是 $(5, 5)$,

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(5, 0)$, 点 C 的坐标为 $(0, 5)$.

将 $B(5, 0)$ 、 $C(0, 5)$ 代入 $y = x^2 + bx + c$, 得:

$$\begin{cases} 25 + 5b + c = 0 \\ c = 5 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} b = -6 \\ c = 5 \end{cases},$$

$\therefore$ 抛物线的表达式为 $y = x^2 - 6x + 5$.

(2) $\because$ 抛物线的表达式为 $y = x^2 - 6x + 5$,

$\therefore$ 抛物线的对称轴为直线 $x = 3$.

当 $y = 0$ 时, 有 $x^2 - 6x + 5 = 0$,

解得: $x_1 = 1, x_2 = 5$,

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(1, 0)$, 点 B 的坐标为 $(5, 0)$.

设直线 AD 的解析式为 $y = kx + a (k \neq 0)$,

将 $A(1, 0)$ 、 $D(5, 5)$ 代入 $y = kx + a$, 得:

$$\begin{cases} k + a = 0 \\ 5k + a = 5 \end{cases} \text{ 解得: } \begin{cases} k = \frac{5}{4} \\ a = -\frac{5}{4} \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 AD 的解析式为 $y = \frac{5}{4}x - \frac{5}{4}$.

当 $x = 3$ 时, $y = \frac{5}{4} \times 3 - \frac{5}{4} = \frac{5}{2}$,

$\therefore$ 点 E 的坐标为 $(3, \frac{5}{2})$.

(3) 设点 M 的坐标为 $(3, m)$,

$\because$ 点 A 的坐标为 $(1, 0)$, 点 D 的坐标为 $(5, 5)$,

$$\therefore AM = \sqrt{(3-1)^2 + (m-0)^2} = \sqrt{m^2 + 4},$$

$$AD = \sqrt{(5-1)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{41},$$

$$DM = \sqrt{(3-5)^2 + (m-5)^2} = \sqrt{m^2 - 10m + 29}.$$

分 AD 为边或 AD 为对角线两种情况考虑(如图2):

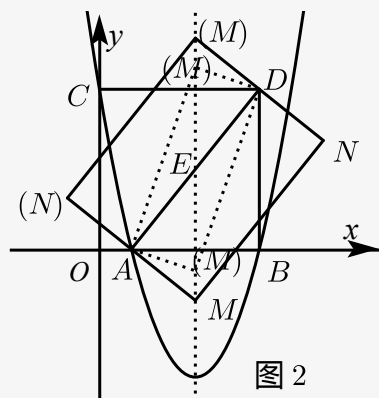


图 2

当 AD 为边时, 有 $AD^2 + AM^2 = DM^2$ 或 $AD^2 + DM^2 = AM^2$, 即

$$41 + m^2 + 4 = m^2 - 10m + 29 \text{ 或 } 41 + m^2 - 10m + 29 = m^2 + 4,$$

$$\text{解得: } m_1 = -\frac{8}{5}, m_2 = \frac{33}{5},$$

$\therefore$ 点 M 的坐标为 $(3, \frac{33}{5})$ 或 $(3, -\frac{8}{5})$;

当 AD 为对角线时, 有 $AM^2 + DM^2 = AD^2$, 即 $m^2 + 4 + m^2 - 10m + 29 = 41$

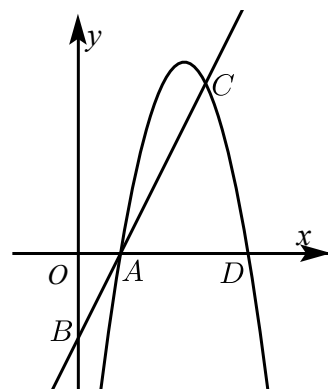
$$\text{解得: } m_3 = \frac{5 - \sqrt{41}}{2}, m_4 = \frac{5 + \sqrt{41}}{2},$$

$$\therefore \text{点} M \text{的坐标为} \left(3, \frac{5 - \sqrt{41}}{2}\right) \text{或} \left(3, \frac{5 + \sqrt{41}}{2}\right).$$

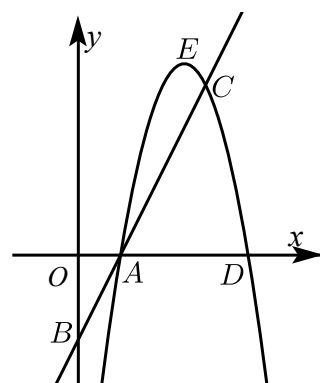
综上所述：存在以 A 、 D 、 M 、 N 为顶点的矩形，点的坐标为 $\left(3, \frac{33}{5}\right)$ ， $\left(3, -\frac{8}{5}\right)$ ， $\left(3, \frac{5 - \sqrt{41}}{2}\right)$ 或 $\left(3, \frac{5 + \sqrt{41}}{2}\right)$ 。

【标注】【题型】题型：二次函数与平行四边形

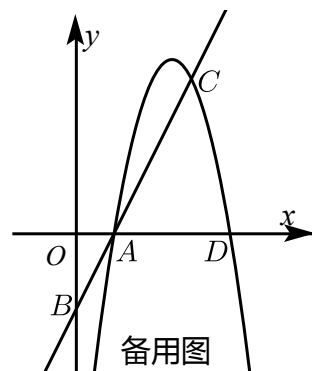
6. 如图，已知直线 $l: y = 2x - 2$ 分别与 x 轴、 y 轴交于点 A 、 B 两点， C 为 l 在第一象限内的一点，且 $AC = 2\sqrt{5}$ ，抛物线 $y = ax^2 + bx - 8$ 过 A 、 C 两点，且与 x 轴的另一交点为 D 。



- (1) 求抛物线的解析式。
 (2) 如图若抛物线 $y = ax^2 + bx - 8$ 的顶点为 E ， P 为直线 AC 上的一动点，当 $|PD - PE|$ 值最大时，求此时点 P 的坐标及 $|PD - PE|$ 的最大值。



- (3) 如图，若点 M 为 x 轴上一点，点 N 为平面内一点，且满足以点 B 、 C 、 M 、 N 为顶点的四边形是矩形，请直接写出点 N 的坐标。

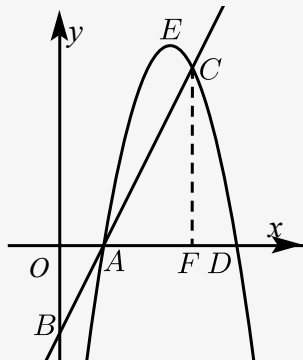


【答案】(1) $y = -2x^2 + 10x - 8$.

(2) $P\left(\frac{18}{5}, \frac{26}{5}\right)$, $|PD - PE|$ 的最大值为 $\frac{3}{10}\sqrt{170}$.

(3) $N_1(-1, 6)$, $N_2(8, -6)$, $N_3\left(\frac{3 - \sqrt{41}}{2}, 2\right)$, $N_4\left(\frac{3 + \sqrt{41}}{2}, 2\right)$.

【解析】(1) 因为 $y = 2x - 2$ 与 x 轴、 y 轴交于 A 、 B 两点，



所以 $A(1, 0)$ 、 $B(0, -2)$ ，

所以 $OA = 1$ ， $OB = 2$ ， $AB = \sqrt{5}$ ，

过点 C 作 $CF \perp x$ 轴于点 F 。

$\triangle AOB \sim \triangle AFC$ ，

所以 $\frac{AC}{AB} = \frac{AF}{AD} = \frac{CF}{OB}$ ，

所以 $AF = 2$ ， $CF = 4$ ，

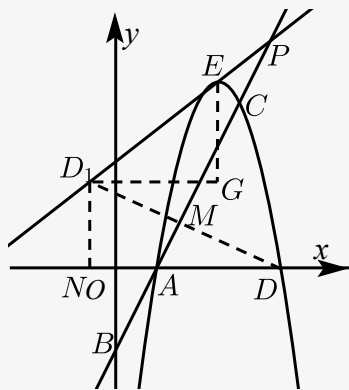
所以 $OF = 3$ ，

所以点 $C(3, 4)$ 。

将点 $A(1, 0)$ 、 $C(3, 4)$ 代入 $y = ax^2 + bx - 8$ ，得 $a = -2$ ， $b = 10$ ，

所以抛物线的解析式为 $y = -2x^2 + 10x - 8$ 。

(2) 作点 D 关于直线 AC 的对称点 D_1 ，交直线 AC 于点 M ，作直线 D_1E 交直线 AC 于点 P ，此时 $|PD - PE|$ 的值最大， $|PD - PE|$ 的值即 $|PD_1 - PE|$ 的值，也就是线段 D_1E 的长。



因为 D 是抛物线与 x 轴的交点，

所以点 $D(4, 0)$ ，

所以 $AD = 3$,

因为 $\triangle AOB \sim \triangle AMD$,

$$\text{所以 } \frac{AD}{AB} = \frac{AM}{AO} = \frac{MD}{OB},$$

$$MD = \frac{6}{5}\sqrt{5}, DD_1 = \frac{12}{5}\sqrt{5},$$

$\triangle D_1ND \sim \triangle AMD$,

$$\text{所以 } \frac{D_1D}{AD} = \frac{D_1N}{AM} = \frac{ND}{MD},$$

$$\text{所以 } D_1N = \frac{12}{5}, DN = \frac{24}{5}.$$

又因为 $DO = 4$,

$$\text{所以 } ON = \frac{4}{5},$$

$$\text{所以 } D_1\left(-\frac{4}{5}, \frac{12}{5}\right).$$

又因为抛物线的顶点 $E\left(\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right)$,

$$\text{所以直线 } D_1E \text{ 的解析式为 } y = \frac{7}{11}x + \frac{32}{11},$$

$$\text{解方程组 } \begin{cases} y = \frac{7}{11}x + \frac{32}{11} \\ y = 2x - 2 \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x = \frac{18}{5} \\ y = \frac{26}{5} \end{cases}$$

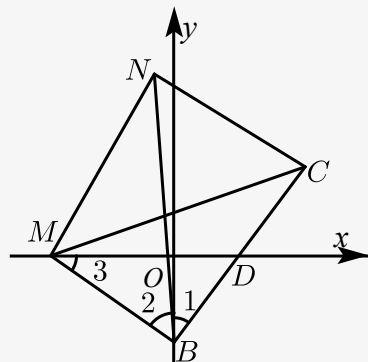
$$\text{所以点 } P\left(\frac{18}{5}, \frac{26}{5}\right).$$

$$\text{过点 } D_1 \text{ 作 } D_1G \perp y \text{ 轴, 过点 } E \text{ 作 } EG \perp x \text{ 轴, } D_1G = \frac{33}{10}, EG = \frac{21}{10},$$

$$\text{所以 } D_1E = \sqrt{\left(\frac{33}{10}\right)^2 + \left(\frac{21}{10}\right)^2} = \frac{3}{10}\sqrt{170},$$

$$\text{即当点 } P\left(\frac{18}{5}, \frac{26}{5}\right) \text{ 时, } |PD - PE| \text{ 的最大值为 } \frac{3}{10}\sqrt{170},$$

(3) 如图:



当 $y = 0$ 时, $2x - 2 = 0$, 解得 $x = 1$, 即 $D(1, 0)$,

$$\because \angle 1 + \angle 2 = 90^\circ, \angle 2 + \angle 3 = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 3,$$

$$\text{又 } \because \angle BOD = \angle MOB,$$

$$\therefore \triangle BOD \sim \triangle MOB,$$

$$\therefore \frac{MO}{BO} = \frac{BO}{OD},$$

解得 $MO = 4$, 即 $M(-4, 0)$,

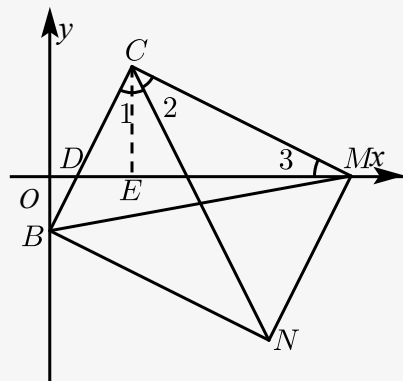
由对角线平分, 得

$$\frac{x_N + x_B}{2} = \frac{x_M + x_C}{2}, \text{ 即 } \frac{x_N + 0}{2} = \frac{-4 + 3}{2}, \text{ 即 } x_N = -1,$$

$$\frac{y_N + y_B}{2} = \frac{y_M + y_C}{2}, \text{ 即 } \frac{y_N + (-2)}{2} = \frac{0 + 4}{2}, \text{ 即 } y_N = 6,$$

N 点坐标为 $(-1, 6)$;

如图 :



作 $CE \perp OM$ 于 E , $OE = 3$, $CE = 4$.

当 $y = 0$ 时, $2x - 2 = 0$, 解得 $x = 1$, 即 $D(1, 0)$,

$$DE = OE - OD = 3 - 1 = 2 .$$

$$\because \angle 1 + \angle 2 = 90^\circ, \angle 2 + \angle 3 = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 3,$$

$$\text{又} \because \angle DEC = \angle CEM,$$

$$\therefore \triangle DEC \sim \triangle CEM, \therefore \frac{DE}{CE} = \frac{CE}{EM},$$

解得 $ME = 8$, 即 $M(11, 0)$,

由矩形的对角线平分, 得

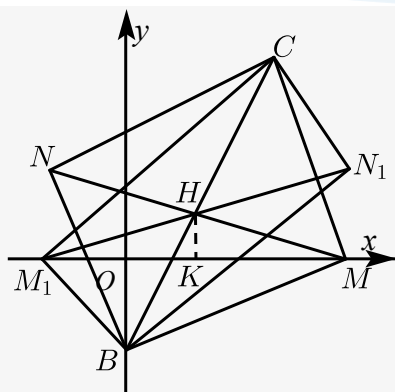
$$\frac{x_N + x_B}{2} = \frac{x_M + x_C}{2}, \text{ 即 } \frac{x_N + x_C}{2} = \frac{x_B + x_M}{2}, \frac{x_N + 3}{2} = \frac{0 + 11}{2}, \text{ 即}$$

$$x_N = 8,$$

$$\frac{y_N + y_C}{2} = \frac{y_B + y_M}{2}, \text{ 即 } \frac{y_N + 4}{2} = \frac{-2 + 0}{2}, \text{ 即 } y_N = -6,$$

N 点坐标为 $(8, -6)$.

如图, 当 BC 为对角线时, 有两种情形, 设 BC 的中点为 H , 作 $HK \perp x$ 轴于 K ,



易知 $H\left(\frac{3}{2}, 1\right)$, $HM = HM_1 = \frac{1}{2}BC = \frac{3\sqrt{5}}{2}$,

$$\therefore KM = KM_1 = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)^2 - 1^2} = \frac{\sqrt{41}}{2},$$

$$\therefore M\left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{41}}{2}, 0\right), M_1\left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{41}}{2}, 0\right),$$

$$\therefore HN = HM, HN_1 = HM_1,$$

$$\therefore N\left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{41}}{2}, 2\right), N_1\left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{41}}{2}, 2\right),$$

综上所述：若点 M 为 x 轴上一点，点 N 为平面内一点，且满足以点 B 、 C 、 M 、 N

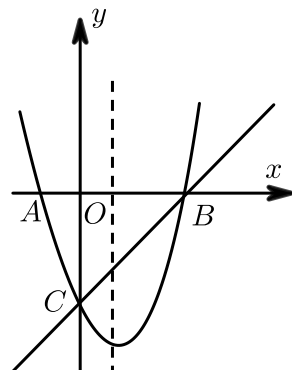
为顶点的四边形是矩形，点 N 的坐标 $(8, -6)$ 或 $(-1, 6)$ 或 $\left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{41}}{2}, 2\right)$ 或

$$\left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{41}}{2}, 2\right).$$

【标注】【知识点】二次函数与平行四边形

三、菱形

7. 如图，抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于点 A 和点 B ，与 y 轴交于点 C ，作直线 BC ，点 B 的坐标为 $(6, 0)$ ，点 C 的坐标为 $(0, -6)$ 。



- (1) 求抛物线的解析式并写出其对称轴。

- (2) D 为抛物线对称轴上一点, 当 $\triangle BCD$ 是以 BC 为直角边的直角三角形时, 求 D 点坐标.
- (3) 若 E 为 y 轴上且位于点 C 下方的一点, P 为直线 BC 上的一点, 在第四象限的抛物线上是否存在一点 Q , 使以 C 、 E 、 P 、 Q 为顶点的四边形是菱形, 若存在, 请求出 Q 点的横坐标; 若不存在, 请说明理由.

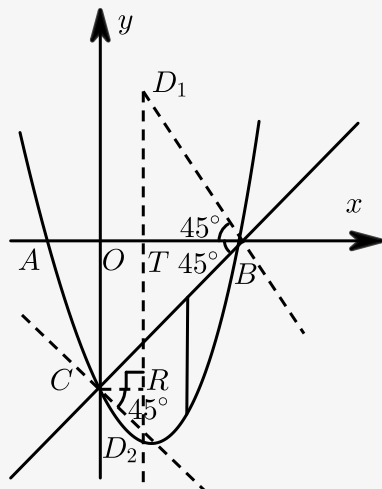
【答案】 (1) $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 6$, 对称轴为: $x = 2$.

(2) $(2, 4)$ 或 $(2, -8)$.

(3) 存在, 点 Q 的横坐标为 $6 - 2\sqrt{2}$ 或 2 .

【解析】 (1) 将 $(6, 0)$, $(0, -6)$ 代入 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$,
 得 $\begin{cases} 18 + 6b + c = 0 \\ c = -6 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} b = -2 \\ c = -6 \end{cases}$,
 $\therefore y = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 6$, 对称轴为直线 $x = 2$.

(2)



$\triangle BCD$ 是以 BC 为直角边的直角三角形,

① $\angle CBD = 90^\circ$ 时,

$\because B(6, 0)$, $C(0, -6)$,

$\therefore \angle CBO = 45^\circ$,

$\therefore \angle DBA = 45^\circ$,

$\therefore BT = D_1T = 4$,

$\therefore D_1(2, 4)$;

② $\angle DCB = 90^\circ$ 时,

同理 $\angle RCD_2 = 45^\circ$, $\therefore CR = RD_2 = 2$,

$\therefore D_2(2, -8)$,

综上, 点 D 的坐标为 $(2, 4)$ 或 $(2, -8)$.

(3) 当 CE 为菱形的一条边时,

根据题意, 得 $PQ \parallel CE$, 即 $PQ \parallel y$ 轴, 且 $PQ = PC$,

易得直线 BC 的解析式为 $y = x - 6$,

设 $P(a, a - 6)$, 则 $Q\left(a, \frac{1}{2}a^2 - 2a - 6\right) (a > 0)$,

$$\therefore PC = \sqrt{2}a, PQ = a - 6 - \frac{1}{2}a^2 + 2a + 6 = -\frac{1}{2}a^2 + 3a,$$

$$\therefore \sqrt{2}a = -\frac{1}{2}a^2 + 3a,$$

解得 $a = 6 - 2\sqrt{2}$ 或 $a = 0$ (舍去),

故点 Q 的坐标为 $(6 - 2\sqrt{2}, 4 - 8\sqrt{2})$.

当 CE 为菱形的对角线时, $PQ \perp CE$, 即 $PQ \parallel x$ 轴,

设 $P(a, a - 6)$, 则 $Q(m, a - 6)$,

$$\text{其中 } a - 6 = \frac{1}{2}m^2 - 2m - 6,$$

$$\text{则 } PC = -\sqrt{2}a, CQ^2 = m^2 + a^2,$$

由题意得 $CQ = CP$,

$$\therefore (-\sqrt{2}a)^2 = m^2 + a^2,$$

$$\therefore m^2 = a^2,$$

解得 $m = -a$,

$$\therefore a - 6 = \frac{1}{2}a^2 + 2a - 6,$$

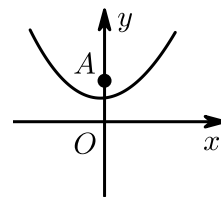
解得 $a = -2$ 或 $a = 0$ (舍去),

$$\therefore Q(2, -8).$$

综上, 点 Q 的横坐标为 $6 - 2\sqrt{2}$ 或 2 .

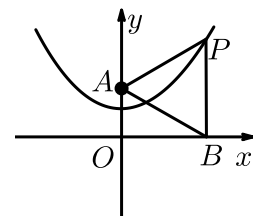
【标注】【知识点】二次函数与直角三角形结合

8. 已知抛物线 $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$ (如图所示).



(1) 填空: 抛物线的顶点坐标是 (_____ , _____), 对称轴是 _____.

(2) 已知 y 轴上一点 $A(0, 2)$, 点 P 在抛物线上, 过点 P 作 $PB \perp x$ 轴, 垂足为 B . 若 $\triangle PAB$ 是等边三角形, 求点 P 的坐标.



(3)

在(2)的条件下,点 M 在直线 AP 上.在平面内是否存在点 N ,使四边形 $OAMN$ 为菱形?若存在,直接写出所有满足条件的点 N 的坐标;若不存在,请说明理由.

【答案】 (1) $0; 1; y$ 轴 或 $x = 0$

(2) 点 P 的坐标为 $(2\sqrt{3}, 4)$ 或 $(-2\sqrt{3}, 4)$.

(3) 存在点 $N(\sqrt{3}, 1), (-\sqrt{3}, -1), (-\sqrt{3}, 1), (\sqrt{3}, -1)$, 使得四边形 $OAMN$ 是菱形.

【解析】 (1) 顶点坐标是 $(0, 1)$, 对称轴是 y 轴 (或 $x = 0$).

(2) $\because \triangle PAB$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle ABO = \angle 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ.$$

$$\therefore AB = 2OA = 4.$$

$$\therefore PB = 4. \text{ 把 } y = 4 \text{ 代入 } y = \frac{1}{4}x^2 + 1, \text{ 得 } x = \pm 2\sqrt{3}.$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 的坐标为 } (2\sqrt{3}, 4) \text{ 或 } (-2\sqrt{3}, 4).$$

(3) 设存在点 M 使得 $OAMN$ 是菱形,

$$\therefore \angle OAP > 90^\circ,$$

$\therefore OA$ 不可能为菱形的对角线, 只能为菱形的边. 若点 P 的坐标为 $(2\sqrt{3}, 4)$,

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(0, 2)$,

设线段 AP 所在直线的解析式为 $y = kx + b$, 则

$$\begin{cases} 2\sqrt{3}k + b = 4 \\ b = 2 \end{cases},$$

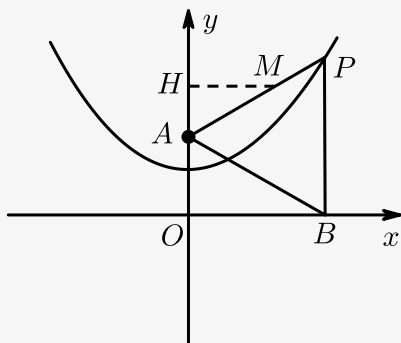
$$\text{解得: } \begin{cases} k = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ b = 2 \end{cases}.$$

$$\therefore AP \text{ 所在直线的解析式为: } y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 2.$$

$\therefore$ 点 M 在直线 AP 上,

$$\therefore \text{设点 } M \text{ 的坐标为: } \left(m, \frac{\sqrt{3}}{3}m + 2\right).$$

如图, 作 $MH \perp y$ 轴于点 H , 则 $MH = m$,



$$AN = OH - OA = \frac{\sqrt{3}}{3}m + 2 - 2 = \frac{\sqrt{3}}{3}m.$$

$\because OA$ 为菱形的边,

$$\therefore AM = AO = 2.$$

$\therefore$ 在 $\text{Rt} \triangle AMH$ 中, $AH^2 + MH^2 = AM^2$,

$$\text{即: } m^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}m\right)^2 = 2^2, \text{ 解得: } m = \pm\sqrt{3}.$$

$$\therefore M(\sqrt{3}, 3) \text{ 或 } (-\sqrt{3}, 1).$$

当 $M(\sqrt{3}, 3)$ 时, $N(\sqrt{3}, 1)$;

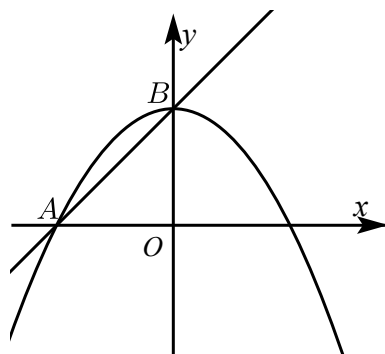
当 $M(-\sqrt{3}, 1)$ 时, $N(-\sqrt{3}, -1)$.

若点 P 的坐标为 $(-2\sqrt{3}, 4)$, 同理可得 N 的坐标为 $(-\sqrt{3}, 1)$ 或 $(\sqrt{3}, -1)$.

综上所述, 存在点 $N(\sqrt{3}, 1)$, $(-\sqrt{3}, -1)$, $(-\sqrt{3}, 1)$, $(\sqrt{3}, -1)$, 使得四边形 $OAMN$ 是菱形.

【标注】【知识点】二次函数与直角三角形结合

9. 如图, 在平面直角坐标系中, 直线 AB 和抛物线交于点 $A(-4, 0)$, $B(0, 4)$, 且点 B 是抛物线的顶点.



- (1) 求直线 AB 和抛物线的解析式.
- (2) 点 P 是直线上方抛物线上的一点, 求当 $\triangle PAB$ 面积最大时点 P 的坐标.
- (3) M 是直线 AB 上一动点, 在平面直角坐标系内是否存在点 N , 使以 O 、 B 、 M 、 N 为顶点的四边形是菱形? 若存在, 请求出点 N 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

【答案】 (1) 直线 AB 的解析式为 $y = x + 4$, 抛物线的解析式为 $y = -\frac{1}{4}x^2 + 4$.

(2) $P(-2, 3)$.

(3) $(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ 或 $(-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$ 或 $(-4, 4)$ 或 $(2, 2)$.

【解析】 (1) 设直线的解析式为 $y = kx + b$,

$$\therefore \text{将 } A(-4, 0), B(0, 4) \text{ 代入得: } \begin{cases} -4k + b = 0 \\ b = 4 \end{cases},$$

解得 $k = 1$, $b = 4$,

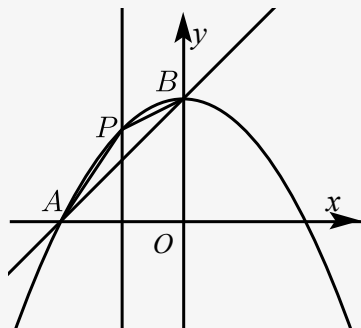
∴直线 AB 的解析式为 $y = x + 4$,

设抛物线的解析式为 $y = ax^2 + 4$,

∴将 $A(-4, 0)$ 代入得: $16a + 4 = 0$, 解得 $a = -\frac{1}{4}$,

∴抛物线的解析式为 $y = -\frac{1}{4}x^2 + 4$.

(2) 如图所示, 过点 P 作 $PQ \perp x$ 轴, 交 AB 于点 Q .



设点 P 的坐标为 $(a, -\frac{1}{4}a^2 + 4)$,

则点 Q 的坐标为 $(a, a + 4)$,

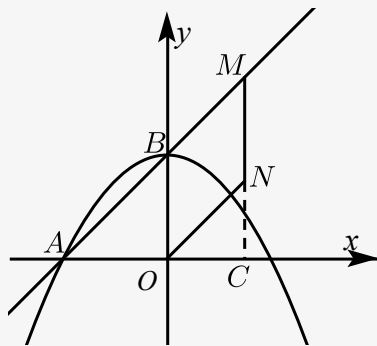
则 $PQ = -\frac{1}{4}a^2 + 4 - (a + 4) = -\frac{1}{4}a^2 - a$,

∴ $S_{\triangle ABP}$ 的面积

$$= \frac{1}{2}PQ \cdot (x_B - x_A) = \frac{1}{2} \times 4 \times \left(-\frac{1}{4}a^2 - a\right) = -\frac{1}{2}a^2 - 2a = -\frac{1}{2}(a + 2)^2 + 2$$

∴当 $a = -2$ 时 $\triangle ABP$ 的面积最大, 此时 $P(-2, 3)$.

(3) 如图所示: 延长 MN 交 x 轴与点 C ,



∴ $MN \parallel OB$, $OB \perp OC$,

∴ $MN \perp OC$,

∴ $OA = OB$, $\angle AOB = 90^\circ$,

∴ $\angle BAO = 45^\circ$,

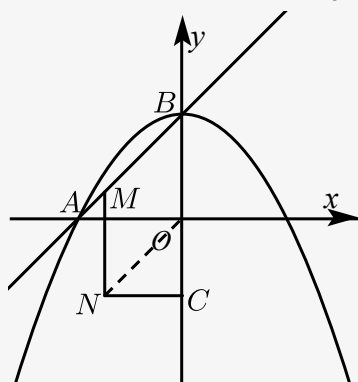
∴ $ON \parallel AB$,

∴ $\angle NOC = 45^\circ$,

$$\therefore OC = ON \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}, \quad NC = ON \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2},$$

∴点 N 的坐标为 $(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$,

如图所示：过点 N 作 $NC \perp y$ 轴，垂足为 C ，



$\because OA = OB, \angle AOB = 90^\circ,$

$\therefore \angle OBA = 45^\circ,$

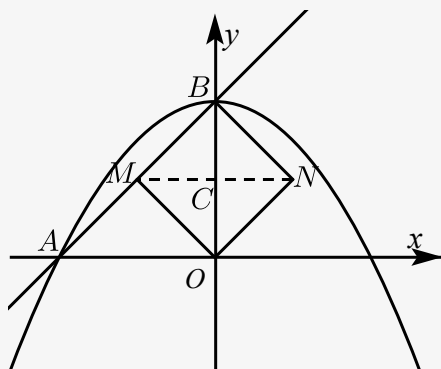
$\because ON \parallel AB,$

$\therefore \angle NOC = 45^\circ,$

$\therefore OC = ON \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}, NC = ON \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2},$

$\therefore$ 点 N 的坐标为 $(-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$ ，

如图所示：连接 MN 交 y 轴与点 C ，



$\because$ 四边形 $BNOM$ 为菱形， $OB = 4$ ，

$\therefore BC = OC = 2, MC = CN, MN \perp OB,$

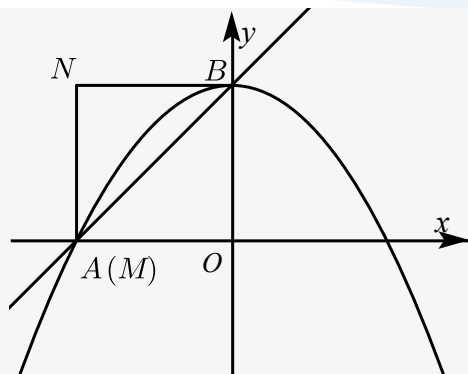
$\therefore$ 点的纵坐标为 2 ，

$\therefore$ 将 $y = 2$ 代入 $y = x + 4$ 得： $x + 4 = 2$ ，解得： $x = -2$ ，

$\therefore$ 点 M 的坐标为 $(-2, 2)$ ，

$\therefore$ 点 N 的坐标为 $(2, 2)$ ，

如图所示：



∵ 四边形 $OBNM$ 为菱形，

∴ $\angle NBM = \angle ABO = 45^\circ$ ，

∴ 四边形 $OBNM$ 为正方形，

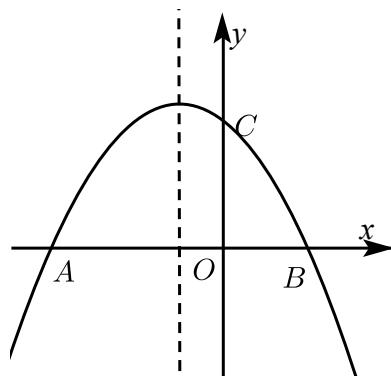
∴ 点 N 的坐标为 $(-4, 4)$ ，

综上所述点 N 的坐标为 $(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ 或 $(-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$ 或 $(-4, 4)$ 或 $(2, 2)$ 。

【标注】【知识点】二次函数与特殊平行四边形

四、正方形

10. 如图，在平面直角坐标系中，抛物线 $y = ax^2 + 2ax + c$ 交 x 轴于 A, B 两点，交 y 轴于点 $C(0, 3)$ ， $\tan \angle OAC = \frac{3}{4}$ 。



- (1) 求抛物线的解析式。
- (2) 点 M 是抛物线上任意一点，连接 CM ，以 CM 为边作正方形 $CMEF$ ，是否存在点 M 使点 E 恰好落在对称轴上？若存在，请求出点 M 的坐标；若不存在，请说明理由。

【答案】 (1) $y = -\frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4}x + 3$ 。

(2) 存在， $M_1(-4, 0)$ ， $M_2(-\frac{2}{3}, \frac{10}{3})$ ， $M_3(-\frac{4}{3}, \frac{10}{3})$ ， $M_4(2, 0)$ 。

【解析】 (1) 略。

(2)

设 $M\left(m, -\frac{3}{8}m^2 - \frac{3}{4}m + 3\right)$, $E(-1, n)$,

过点 M 作 $MH \perp y$ 轴于 H 交对称轴于点 G ,

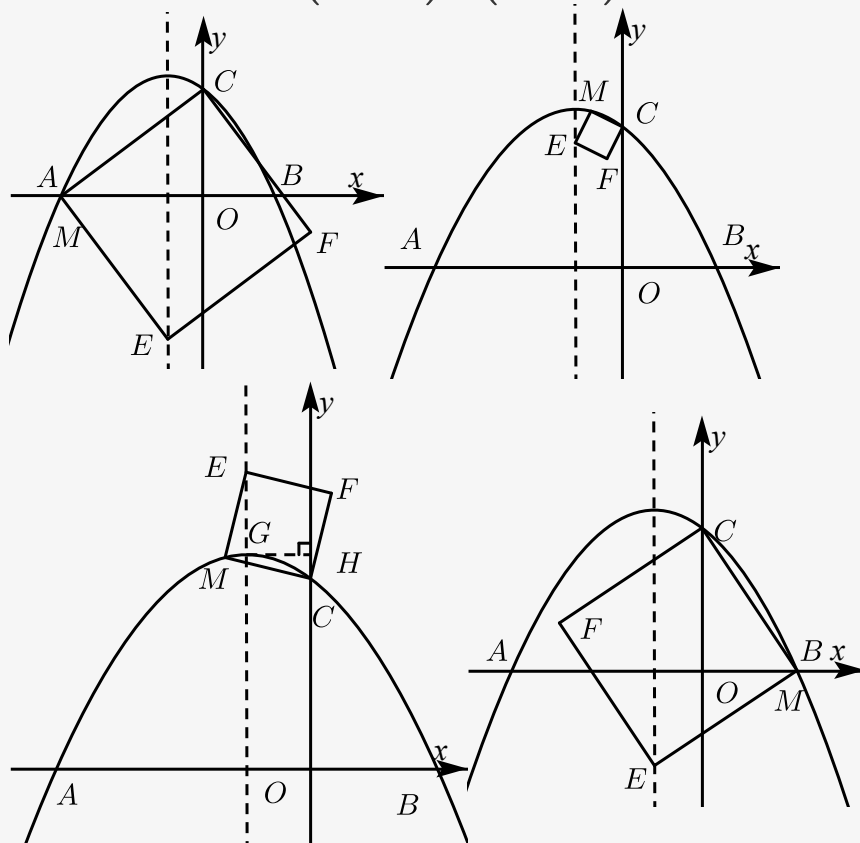
则 $\triangle EGM \cong \triangle MHC$,

则 $MG = HC$,

$$\text{即 } |-1 - m| = \left| -\frac{3}{8}m^2 - \frac{3}{4}m + 3 - 3 \right|,$$

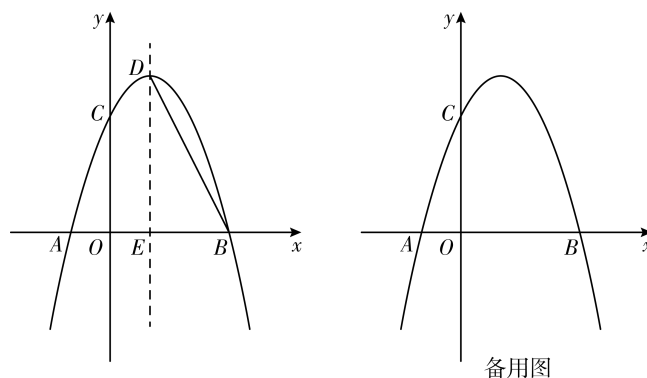
解得 $m = 2, -\frac{4}{3}, -4$ 或 $-\frac{2}{3}$.

点 M 的坐标为 $(-4, 0)$, $\left(-\frac{4}{3}, \frac{10}{3}\right)$, $\left(-\frac{2}{3}, \frac{10}{3}\right)$ 或 $(2, 0)$.



【标注】【知识点】 一次函数与二次函数的交点

11. 如图, 抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于点 A 和点 B , 与 y 轴交于点 C , 点 B 坐标为 $(6, 0)$, 点 C 坐标为 $(0, 6)$, 点 D 是抛物线的顶点, 过点 D 作 x 轴的垂线, 垂足为 E , 连接 BD .



- (1) 求抛物线的解析式及点 D 的坐标.
- (2) 点 F 是抛物线上的动点, 当 $\angle FBA = \angle BDE$ 时, 求点 F 的坐标.
- (3) 若点 P 是 x 轴上方抛物线上的动点, 以 PB 为边作正方形 $PBFG$, 随着点 P 的运动, 正方形的大小、位置也随着改变, 当顶点 F 或 G 恰好落在 y 轴上时, 请直接写出点 P 的横坐标.

【答案】 (1) $y = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 8$, $D(2, 8)$.

(2) $\left(-1, \frac{7}{2}\right)$ 或 $\left(-3, -\frac{9}{2}\right)$.

(3) $1 + \sqrt{13}$ 或 4 或 0 或 $3 - \sqrt{21}$.

【解析】 (1) 把点 B 坐标为 $(6, 0)$, 点 C 坐标为 $(0, 6)$ 代入抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 得:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} \times 36 + 6b + c = 0 \\ c = 6 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} b = 2 \\ c = 6 \end{cases},$$

$$\therefore y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6 = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 8,$$

$$\therefore D(2, 8).$$

(2) 如图1,

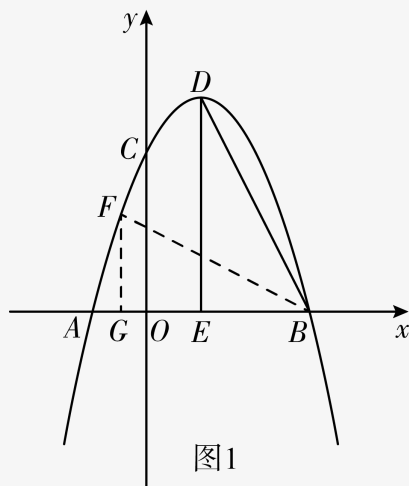


图1

过 F 作 $FG \perp x$ 轴于点 G ,

$$\text{设 } F\left(x, -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6\right), \text{ 则 } FG = \left| -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6 \right|,$$

$$\therefore \angle FBA = \angle BDE, \angle FGB = \angle BED = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle FBG \sim \triangle BDE,$$

$$\therefore \frac{FG}{BG} = \frac{BE}{DE},$$

$$\therefore B(6, 0), D(2, 8),$$

$$\therefore E(2, 0), BE = 4, DE = 8, OB = 6,$$

$$\therefore BG = 6 - x,$$

$$\therefore \frac{\left| -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6 \right|}{6-x} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2},$$

当点 F 在 x 轴上方时, 有 $6-x = 2\left(-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6\right)$,

解得 $x = -1$ 或 $x = 6$ (舍去),

此时 F 点的坐标为 $\left(-1, \frac{7}{2}\right)$;

当点 F 在 x 轴下方时, 有 $6-x = 2\left(\frac{1}{2}x^2 - 2x - 6\right)$,

解得 $x = -3$ 或 $x = 6$ (舍去),

此时 F 点的坐标为 $\left(-3, -\frac{9}{2}\right)$;

综上可知 F 点的坐标为 $\left(-1, \frac{7}{2}\right)$ 或 $\left(-3, -\frac{9}{2}\right)$.

(3) 设 $P\left(m, -\frac{1}{2}m^2 + 2m + 6\right)$,

有三种情况:

①如图2, 当 G 在 y 轴上时, 过 P 作 $PQ \perp y$ 轴于 Q , 作 $PM \perp x$ 轴于 M ,

$\therefore$ 四边形 $PBFG$ 是正方形,

$\therefore PG = PB$,

$\therefore \angle PQG = \angle PMB = 90^\circ$, $\angle QPG = \angle MPB$,

$\therefore \triangle PQG \cong \triangle PMB$,

$\therefore PQ = PM$,

即 $m = -\frac{1}{2}m^2 + 2m + 6$,

解得: $m_1 = 1 + \sqrt{13}$, $m_2 = 1 - \sqrt{13}$ (舍),

$\therefore P$ 的横坐标为 $1 + \sqrt{13}$,

②当 F 在 y 轴上时, 如图3, 过 P 作 $PM \perp x$ 轴于 M ,

同理得: $\triangle PMB \cong \triangle BOF$,

$\therefore OB = PM = 6$,

即 $-\frac{1}{2}m^2 + 2m + 6 = 6$,

$m_1 = 0$ (舍), $m_2 = 4$,

$\therefore P$ 的横坐标为4,

③当 F 在 y 轴上时, 如图4, 此时 P 与 C 重合,

此时 P 的横坐标为0,

综上所述, 点 P 的横坐标为 $1 + \sqrt{13}$ 或4或0.

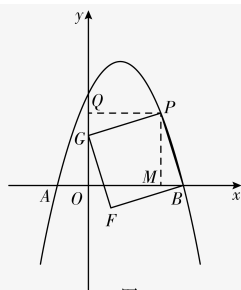


图2

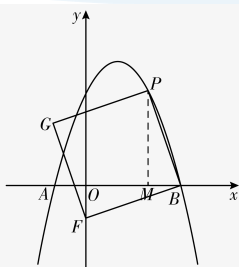


图3

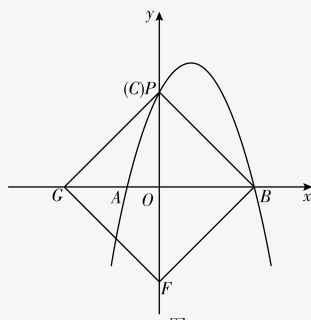
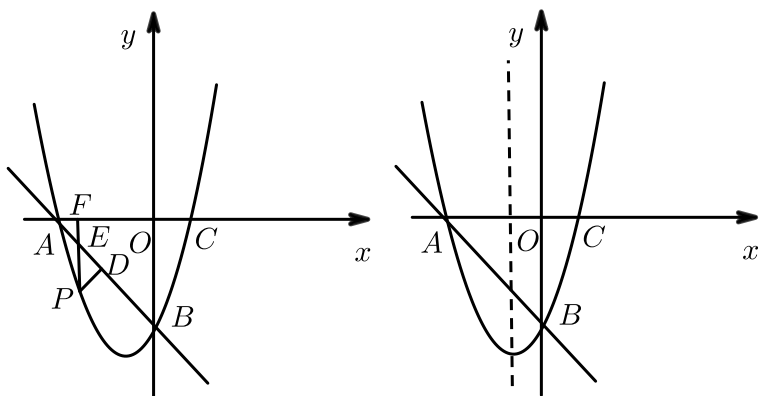


图4

【标注】【知识点】二次函数与动点问题

12. 如图，在平面直角坐标系中，抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于点 A ， $C(1, 0)$ ，与 y 轴交于点 $B(0, -3)$ ，点 P 是直线 AB 下方的抛物线上一动点，过点 P 作 x 轴的垂线，垂足为点 F ，交直线 AB 于点 E ，作 $PD \perp AB$ 于点 D 。



- (1) 求抛物线的解析式。
- (2) 当 $\triangle PDE$ 面积最大时，求出点 P 的坐标。
- (3) 连接 AP ，以 AP 为边在其右侧作正方形 $APMN$ ，随着点 P 的运动，正方形的大小、位置也随之改变。则当顶点 M 或 N 恰好落在抛物线的对称轴上时，求出点 P 的坐标。

【答案】 (1) 抛物线的解析式为 $y = x^2 + 2x - 3$ 。

(2) 点 $P\left(-\frac{3}{2}, -\frac{15}{4}\right)$ 时， $\triangle PDE$ 的面积最大。

(3) 当顶点 M 恰好落在抛物线对称轴上时，点 P 坐标为 $\left(\frac{-1 - \sqrt{17}}{2}, \frac{1 - \sqrt{17}}{2}\right)$ ，

当顶点 N 恰好落在抛物线对称轴上时, 点 P 的坐标为 $(-\sqrt{2}-1, -2)$.

【解析】(1) $\because$ 抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 经过点 $B(0, -3)$, $C(1, 0)$,

$$\therefore \begin{cases} c = -3 \\ 1 + b + c = 0 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} b = 2 \\ c = -3 \end{cases},$$

所以, 抛物线的解析式为 $y = x^2 + 2x - 3$.

(2) $\because$ 把 $y = 0$ 代入解析式可得: $x_1 = 1$, $x_2 = -3$,

$$\therefore A(-3, 0),$$

$$\therefore B(0, 3),$$

$$\therefore OA = OB = 3,$$

$\therefore \triangle AOB$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore \angle BAO = 45^\circ.$$

$$\because PF \perp x\text{轴},$$

$$\therefore \angle AEF = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ,$$

$$\text{又} \because PD \perp AB,$$

$\therefore \triangle PDE$ 是等腰直角三角形,

$\therefore PD$ 越大, $\triangle PDE$ 的面积越大,

易得直线 AB 的解析式为 $y = -x - 3$,

设与 AB 平行的直线解析式为 $y = -x - m$,

$$\text{联立} \begin{cases} y = -x - m \\ y = x^2 + 2x - 3 \end{cases},$$

$$\text{消掉} y \text{得}, x^2 + 3x + m - 3 = 0,$$

$$\text{当} \Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times (m - 3) = 0,$$

即 $m = \frac{21}{4}$ 时, 直线与抛物线只有一个交点, PD 最长,

$$\text{此时} x = -\frac{3}{2}, y = \frac{3}{2} - \frac{21}{4} = -\frac{15}{4},$$

$\therefore$ 点 $P\left(-\frac{3}{2}, -\frac{15}{4}\right)$ 时, $\triangle PDE$ 的面积最大.

(3) 抛物线 $y = x^2 + 2x - 3$ 的对称轴为直线 $x = -\frac{2}{2 \times 1} = -1$,

(i) 如图1, 点 M 在对称轴上时, 过点 P 作 $PQ \perp$ 对称轴于 Q ,

